Λύσεις Διαγωνίσματος Μαθηματικών Β' Λυκείου: 29/1/2017

ΘΕΜΑ Α'

Α1 i) $L_1 = \lim\limits_{x\to 2}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) + \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3-4 \Rightarrow \boxed{L_1=-1}$

ii) $L_2 = \lim\limits_{x\to 2}(2f(x)-g(x)) = 2\cdot\lim\limits_{x\to 2} f(x) - \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 2\cdot 3-(-4) \Rightarrow \boxed{L_2=10}$

iii) $L_3 = \lim\limits_{x\to 2}(f^2(x)\cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to 2} f(x)\right)^2\cdot \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3^2(-4) \Rightarrow \boxed{L_3=-36}$

iv) $L_4 = \lim\limits_{x\to 2}\sqrt{3f(x)-4g(x)} = \sqrt{3\cdot\lim\limits_{x\to 2} f(x) - 4\cdot\lim\limits_{x\to 2} g(x)} = \sqrt{3\cdot 3-4\cdot(-4)} \Rightarrow \boxed{L_4=5}$

Α2 i) $l_1 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2+2} \Rightarrow \boxed{l_1=\dfrac{1}{4}}$

ii) $l_2 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+x+1} = \dfrac{1-3}{1+1+1} \Rightarrow \boxed{l_2=-\dfrac{2}{3}}$

iii) $l_3 = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-7x-6}{x^4-16} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x-3)}{(x^2-4)(x^2+4)} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x-3)}{(x-2)\cancel{(x+2)}(x^2+4)} =$

1	0	−7	−6	−2
	−2	4	6	
1	−2	−3	0	

$= \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-3}{(x-2)(x^2+4)} = \dfrac{4+4-3}{-4\cdot 8} \Rightarrow \boxed{l_3=-\dfrac{5}{32}}$

iv) $l_4 = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^3-x+1} = \dfrac{1-1}{-1+1-1} \Rightarrow \boxed{l_4=0}$

Α3 i) • $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+2x}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+2)}{x(x-3)} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{0+2}{0-3} = -\dfrac{2}{3}$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3+2x^2-8x}{2x^2-4x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x^2+2x-8)}{x(2x-4)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+2x-8}{2x-4} = \dfrac{0+0-8}{0-4} = 2$, άρα δεν υπάρχει το k_1

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ii) • $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3+2x^2-8x}{2x^2-4x} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x(x^2+2x-8)}{2x(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x(x-2)(x+4)}{2x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$

• $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2+1}{2-1} = 3$

Άρα $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3}$

iii) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x^3+2x^2-8x}{2x^2-4x} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8\cdot\frac{1}{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\frac{1}{8}+\frac{2}{4}-4}{\frac{2}{4}-2} = \dfrac{\frac{1+4-32}{8}}{\frac{1}{2}-2} = \dfrac{\frac{-27}{8}}{-\frac{3}{2}} = \dfrac{27\cdot 2}{8\cdot 3} \Rightarrow \boxed{K_3 = \dfrac{9}{4}}$

ΘΕΜΑ Β

Β1

1. Σωστό
2. Λάθος
3. Σωστό
4. Σωστό
5. Λάθος
6. Λάθος
7. Σωστό
8. Λάθος
9. Λάθος
10. Σωστό
11. Σωστό
12. Λάθος
13. Σωστό
14. Λάθος
15. Σωστό

Β2 i) Θεωρία → Σχολ. Βιβλίο: σελ. 129

ii) Θεωρία → Σχολ. Βιβλίο: σελ. 129

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Είναι: $P(x)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)x^3+(\lambda-1)(\lambda+1)x^2+1-\lambda$

Έστω: $\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$

- Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$, τότε το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού
- Αν $\lambda=0$, τότε: $P(x)=-x^2+1$, οπότε το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού
- Αν $\lambda=1$, τότε: $P(x)=0$, οπότε δεν ορίζεται βαθμός
- Αν $\lambda=-1$, τότε: $P(x)=2$, οπότε το $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού

Γ2 Έχουμε: $\underbrace{(x-1)}_{1ου}\cdot \underbrace{P(x)}_{2ου} = \underbrace{2x^3-x^2-2x+1}_{3ου}$ (1)

έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$

Άρα $(1) \Leftrightarrow (x-1)\cdot(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2x^3-x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x-\alpha x^2-\beta x-\gamma=2x^3-x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow \alpha x^3+(\beta-\alpha)x^2+(\gamma-\beta)x-\gamma=2x^3-x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow \alpha=2$ και $\beta-\alpha=-1$ και $\gamma-\beta=-2$ και $-\gamma=1$

$\beta-2=-1$ $\quad$ $-1-1=-2$ ισχύει $\quad$ $\gamma=-1$

$\beta=1$

Άρα $\boxed{P(x)=2x^2+x-1}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Γ3 Έχουμε: $P(x) = (2\alpha+\beta-5)x^2 + (\alpha-\beta-4)x + \alpha-\beta+2\gamma$

i) $P(x)=0 \Leftrightarrow \underset{(1)}{2\alpha+\beta-5=0}$ και $\underset{(2)}{\alpha-\beta-4=0}$ και $\underset{(3)}{\alpha-\beta+2\gamma=0}$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2)

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha+\beta=5\\ \alpha-\beta=4\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}2\alpha+\alpha-4=5\\ \beta=\alpha-4\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}3\alpha=9\\ \beta=\alpha-4\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\boxed{\alpha=3}\\ \boxed{\beta=-1}\end{array}$$

Άρα από $(3) \Rightarrow 3+1+2\gamma=0 \Leftrightarrow 2\gamma=-4 \Leftrightarrow \boxed{\gamma=-2}$

ii) $P(x)=$ σταθερό $\Leftrightarrow 2\alpha+\beta-5=0$ και $\alpha-\beta-4=0$

άρα $\boxed{\alpha=3}$, $\boxed{\beta=-1}$, $\boxed{\gamma\in\mathbb{R}}$

iii) $P(x)$: μηδενικού βαθμού $\Leftrightarrow 2\alpha+\beta-5=0$ και $\alpha-\beta-4=0$ και $\alpha-\beta+2\gamma\neq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha=3}$, $\boxed{\beta=-1}$, $\boxed{\gamma\neq -2}$

Γ4 Έχουμε: $P(x+1)-P(x)=2x^3+1$ (1) και $P(0)=-4$

i) το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$ είναι ίσο με το $P(1)$

Από $(1) \xRightarrow{x=0} P(1)-P(0)=2\cdot 0^3+1 \Leftrightarrow P(1)+4=1 \Leftrightarrow \boxed{P(1)=-3}$

ii) Από $(1) \xRightarrow{x=-1} P(0)-P(-1)=2\cdot(-1)^3+1 \Leftrightarrow -4-P(-1)=-2+1 \Leftrightarrow \boxed{P(-1)=-3}$

iii) Από $(1) \xRightarrow{x=1} P(2)-P(1)=2\cdot 1^3+1 \Leftrightarrow P(2)+3=3 \Leftrightarrow \boxed{P(2)=0}$

οπότε το 2 είναι ρίζα του $P(x)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Έχουμε: $f(x) = 2 + 3\cdot συν\frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

i) $\max f = |3| + 2 = 3 + 2 \Rightarrow \boxed{\max f = 5}$

$\min f = -|3| + 2 = -3 + 2 \Rightarrow \boxed{\min f = -1}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{T = 4\pi}$

ii) • $f(x) = 5 \Leftrightarrow 2 + 3\cdot συν\frac{x}{2} = 5 \Leftrightarrow 3συν\frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow συν\frac{x}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2κ\pi \Leftrightarrow x = 4κ\pi$, $κ \in \mathbb{Z}$

Άρα η f παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της στα σημεία $\boxed{x = 4κ\pi}$, $κ \in \mathbb{Z}$

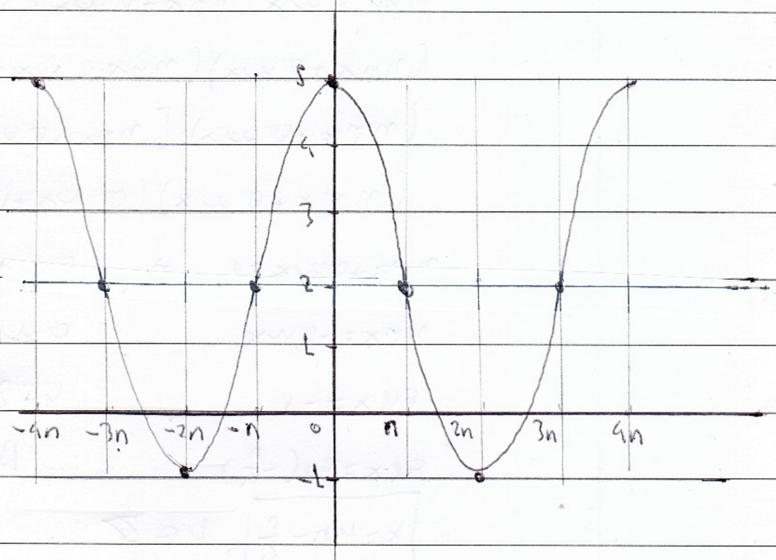
• $f(x) = -1 \Leftrightarrow 2 + 3συν\frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow 3\cdot συν\frac{x}{2} = -3 \Leftrightarrow συν\frac{x}{2} = -1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2κ\pi + \pi \Leftrightarrow x = 4κ\pi + 2\pi$

Άρα η f παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της στα σημεία $\boxed{x = 4κ\pi + 2\pi}$, $κ \in \mathbb{Z}$

iii)

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$συν\frac{x}{2}$	1	0	-1	0	1
$3\cdot συν\frac{x}{2}$	3	0	-3	0	3
$2 + 3\cdot συν\frac{x}{2}$	5	2	-1	2	5



iv) Έχουμε: $f(2x) - f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow f(2x) = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + 3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2x}{2} = 2 + 3\,\sigma\upsilon\nu\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2} \Leftrightarrow 3\cdot\sigma\upsilon\nu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3x-\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{3x-\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{3x-\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{3x-\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 6x = 12\kappa\pi + 3x - \pi$ ή $6x = 12\kappa\pi - 3x + \pi$

$\Leftrightarrow 3x = 12\kappa\pi - \pi$ ή $9x = 12\kappa\pi + \pi$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 4\kappa\pi - \frac{\pi}{3}}$ ή $\boxed{x = \frac{4\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9}}$

Δ2) Πρέπει: $\left.\begin{matrix} x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x \neq \kappa\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Έχουμε: $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x + \eta\mu^2x = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2x \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x + \eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu^2x = 0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) - (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$

$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\cdot[\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu x + 1) - (\sigma\upsilon\nu x + 1)] = 0 \Leftrightarrow$

$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(\sigma\upsilon\nu x + 1)\cdot(\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ ή $\eta\mu x - 1 = 0$

$\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$ $\quad$ $\sigma\upsilon\nu x = -1$ $\quad$ $\eta\mu x = 1$

$\varepsilon\varphi x = -1$ $\quad$ $x = 2\kappa\pi + \pi$ $\quad$ $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad$ Απορ. $\quad$ Απορ

$\boxed{x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

(13) Είναι: $\eta\mu\left(\frac{49\pi}{8} - x\right) = \eta\mu\left(\frac{48\pi+\pi}{8} - x\right) = \eta\mu\left(6\pi + \frac{\pi}{8} - x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$

Επίσης: $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{3\pi}{8}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{8}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$4\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right) + 4\cdot\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) + 4\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(2\eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right) + 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{8} - x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad \acute{\eta} \quad \frac{\pi}{8} - x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$-x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \qquad -x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$$

$$-x = 2\kappa\pi - \frac{7\pi}{24} \qquad -x = 2\kappa\pi + \frac{25\pi}{24}$$

$$\boxed{x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{24}} \qquad \boxed{x = 2\kappa\pi - \frac{25\pi}{24}}$$

$\kappa \in \mathbb{Z}$